Міністерство освіти та науки України
Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна

# «СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ»

Навчально-методичний посібник

для студентів 3 курсу фізичного факультету

Харків 2020

УДК 538.566
Єзерська О.В., Кабатова А., Любімов О.І.

Навчально-методичний посібник присвячений розбору основних положень спеціальної теорії відносності. Основну увагу приділено детальному аналізу наслідків, що випливають з принципу відносності Ейнштейна. Наведено розв'язки деяких оригінальних задач на цю тему.
Даний посібник може бути використаним при вивченні загального курсу «Електродинаміка» на фізичному факультеті.
Методичні вказівки розглянуті на засідання кафедри теоретичної фізики та рекомендовані до публікації (протокол №4 від 11 березня 2020 р.)

Рецензенти: Рашба Г.І., зав. кафедри теоретичної фізики імені І.М.Ліфшиця
Ямпольский В.А., член-кор. АН УРСР, професор кафедри теоретичної фізики імені І.М.Ліфшиця

## ПЕРЕДМОВА

Особливістю курсу електродинаміки, яка виділяє його поміж інших курсів теоретичної фізики, є великий об'єм фактичного матеріалу, що викладається на лекціях. Мабуть, в електродинаміці більше, ніж в будь-якому іншому курсі теоретичної фізики, наводиться формул, визначень, понять, фізичних явищ, ефектів. Ця обставина пов'язана з виключно великою областю застосування електродинаміки в техніці та інших галузях науки. Часто студентам буває важко охопити весь об'єм знань, що викладаються на лекціях та практичних заняттях з електродинаміки.

Та все ж можна виділити розділ, який викликає принципові труднощі на початку навчання. Таким розділом є спеціальна теорія відносності, яка взята за основу викладення теорії електромагнетизму. Труднощі пов'язані з осмисленням незвичних висновків, до яких приводить спеціальна теорія відносності. Від студентів вимагається неабияка наполегливість та терпіння, для того, щоб чітко засвоїти основи теорії, які призводять до кардинальної перебудови наших звичних уявлень про властивості простору й часу.

Процес такої перебудови можна уявити наступним чином. Спочатку відбувається наче поступове «звикання» до нових незвичних висновків теорії, а потім вже, після самостійних роздумів, настає їх чітке розуміння. На першому етапі окрім читання книг та конспекті цілком незамінним уявляється слухове сприйняття матеріалу на лекціях та практичних заняттях. На другому етапі дуже важливим є самостійне розв'язування задач, пов'язаних з вихідними положеннями спеціальної теорії відносності.

# 1. ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ ЕЙНШТЕЙНА

В основі побудови спеціальної теорії відносності (СТВ) лежать два принципи. Перший – це принцип відносності. Другий – скінченність максимальної швидкості розповсюдження взаємодій. Принцип відносності стверджує, що усі закони природи однакові у всіх інерціальних системах відліку. Це означає, що рівняння, які виражають закони природи, є інваріантними (тобто мають однаковий вигляд) відносно переходу з однієї інерціальної системи відліку до іншої. Під інерціальними системами відліку розуміють такі, в котрих тіла, на які не діють зовнішні сили, зберігають свою швидкість за величиною та напрямком. Варто підкреслити, що на відміну від принципу відносності Галілея, який поширюється лише на явища механіки, принцип відносності у тому вигляді, в якому він сформульований вище, має універсальне застосування та справедливий для будь яких фізичних явищ.

Найбільші труднощі для розуміння вихідних положень спеціальної теорії відносності у студентів викликає другий принцип. Він полягає у тому, що взаємодія між матеріальними частинками не може поширюватися зі швидкістю, більшою за деяку «максимальну швидкість поширення взаємодії». Для пояснення змісту другого постулату теорії відносності корисно провести наступні міркування. Розглянемо дві матеріальні точки, що розташовані у просторі на деякій відстані одна від одної. Нехай $\overrightarrow{r_1}$ та $\overrightarrow{r_2}$ – радіус-вектори першої та другої точок у деякій системі координат. Як описати взаємодію між цими матеріальними частинками? Дотримуючись законів класичної механіки, потрібно ввести потенціальну енергію взаємодії $U(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2})$. Якщо в деякий момент часу перша частинка почне змінювати своє місцезнаходження, то друга частинка відчує зміну впливу на неї з боку першої в той же момент часу. Це ясно з того, що сила $\vec{F} = -gradU$, котра діє на кожну з частинок в деякий момент часу, залежить лише від положення частинок в цей же момент часу. Інакше кажучи, при такому способі описання взаємодія поширюється з нескінченно великою швидкістю. Миттєва передача взаємодії між тілами, що знаходяться на скінченній відстані одне від одного, явище таємниче та незрозуміле. Саме в силу містичної природи дії на відстані раніше (до створення Ньютоном класичної механіки) вважали, що дальнодію обов'язково необхідно зводити до близькодії. Якщо між тілами порожнеча, то зрозуміло, що звести дальнодію до близькодії неможливо.

На сучасному етапі розвитку науки це питання вирішується за допомогою поняття поля. Замість того, щоб говорити про те, що дві частинки взаємодіють одна з одною на відстані, можна ввести поняття поля сил, яке породжує в навколишньому просторі, скажімо, перша частинка, а друга, знаходячись у цьому просторі, відчуває вплив з боку сил поля. Якщо перша частинка змінює своє місцезнаходження, то це призводить до зміни структури поля, котре вона породжує. Така зміна розповсюджується зі скінченною швидкістю. Таким чином, якщо з однією з взаємодіючих частинок відбувається будь-яка зміна, то на іншій частинці це відобразиться лише після деякого проміжку часу. Поділивши відстань між частинками на цей проміжок часу, ми знайдемо швидкість розповсюдження взаємодій. У рамках даного кола взаємодій цю швидкість можна вважати максимальною швидкістю передачі сигналу від однієї точки в просторі до іншої.

З першого постулату спеціальної теорії відносності слідує, що швидкість розповсюдження взаємодій повинна бути однаковою в усіх інерціальних системах відліку. Насправді, принцип відносності стверджує, що всі закони природи, в тому числі і наявність максимальної швидкості розповсюдження взаємодій, повинні бути однаковими в усіх інерціальних системах відліку. Якщо б гранична швидкість розповсюдження взаємодій була би різною у різних системах відліку, то стало б можливим відрізняти одну інерціальну систему від іншої. Так як принцип відносності є універсальним, то це неможливо. Отже, швидкість розповсюдження взаємодій має одне й те ж саме значення в будь-якій інерціальній системі відліку.

Як відомо, в природі існують декілька основних типів взаємодій. В курсі класичної електродинаміки розглядаються електромагнітні взаємодії. Швидкість розповсюдження таких взаємодій дорівнює швидкості світла в порожнечі. Тому під максимальною швидкістю розповсюдження взаємодій ми вважатимемо швидкість світла у вакуумі. Вона дорівнює $3 \cdot 10^8$м/с.

Експериментальна перевірка другого постулату Ейнштейна встановлює два факти: 1) в даній інерціальній системі відліку швидкість світла у вакуумі однакова в усіх точках і по всім напрямкам; 2) в усіх інерціальних системах відліку ця швидкість має одне й те саме значення. Перший факт підтверджується дослідами Майкельсона–Морлі та Кеннеді–Трондайка. Другий – спостереженнями подвійних зірок, які були проведені у 1913р. де Сіттером; прямими експериментами з порівняння швидкостей світла від двох протилежних кінців сонячного диска, що обертається (А.М. Бонч–Бруєвич, 1955р.).

В 1964 році в Женеві групою дослідників вимірювалася швидкість $\gamma$-променів, утворених при розпаді $\pi$-мезонів. Швидкість $\pi$-мезонів складала $0.99c$, і, тим не менш, швидкість розповсюдження $\gamma$-випромінювання виявилась рівною $c$ з точністю до 0.001%. Величезна швидкість мезонів аніскільки не позначилася на швидкості створеного ними $\gamma$-випромінювання. Таким чином, можна вважати твердо встановленим той факт, що швидкість світла однакова в усіх інерціальних системах відліку та не залежить від напрямку розповсюдження.

Об’єднання двох основних принципів, що лежать в основі спеціальної теорії відносності, називаються принципом відносності Ейнштейна. Механіка, що основана на цьому принципі, називається релятивістською. Граничний перехід до класичної механіки можна виконати, якщо перейти до граничного випадку $c \to \infty$ в формулах релятивістської механіки.

Принцип відносності Ейнштейна призводить до зміни наших звичних уявлень про властивості простору й часу. Такі поняття, як *раніше*, *пізніше*, *далі*, *ближче*, *одночасно*, *в одному й тому ж місці* виявляються залежними від того, в якій інерціальній системі вони визначаються.

Поняття одномісності є відносним уже в класичній механіці. Для пояснення цього нагадаєм відому притчу про двох братів, які прощаються одне з одним на вокзалі. Один із них стоїть на пероні вокзалу, а інший на підніжці вагону. Після прощання потяг пішов, перший брат повернувся додому, а другий – до себе в купе. Через годину кожному з братів прийшла думка прийти на місце прощання. Один з них прийшов на перон до того місця, де стояв вагон, а другий спустився на підніжку вагону. Кожен із них дійсно прийшов на місце прощання в своїй інерціальній системі відліку. Спочатку можна подумати, що насправді той брат, який повернувся на вокзал, саме він прийшов на справжнє місце прощання. Але якщо врахувати обертання Землі навколо своєї осі, її рух навколо Сонця, рух Сонця в Галактиці і т.д., то легко дійти висновку, що поняття «*в одному й тому ж місці*» має сенс лише в певній інерціальній системі відліку.

Час в класичній механіці є абсолютним. Це означає, що проміжок часу між двома даними подіями однаковий в усіх системах відліку. Зокрема, дві одночасні події для будь-якого спостерігача будуть одночасними і для усілякого іншого.

Принцип відносності Ейнштейна призводить до того, що час не є абсолютним, тобто він плине по-різному в різних системах відліку. Ґрунтуючись на ейнштейнівському принципі відносності, легко показати, що дві одночасні події, що відбуваються у різних точках простору у деякій інерціальній системі відліку, будуть не одночасними в іншій системі. Розглянемо дві інерціальні системи відліку $K$ та $K'$. Система $K'$ рухається вправо з деякою постійною швидкістю уздовж осей $x$ та $x'$ *(Рис.1)*.

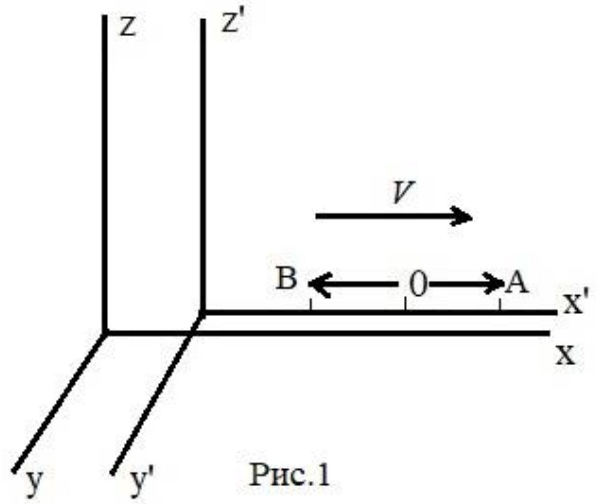

Рис.1

У системі $K'$ на осі $x'$ з точки $O$ відправляються світлові сигнали у напрямках точок $A$ та $B$, що лежать на тій самій осі $x'$. Відстані $OA$ та $OB$ рівні. Нехай перша подія полягає у тому, що світловий сигнал приходить до точки $A$, а друга – до точки $B$. Оскільки в системі $K'$ швидкість світла вліво та вправо дорівнює одному й тому ж значенню *с*, окрім того *ОА*=*ОВ*, то перша та друга події в цій системі відбудуться одночасно. З точки зору спостерігача у системі *К* друга подія (прихід сигналу до точки *В*) відбудеться раніше першої (прихід то точки *А*). Насправді, згідно принципу відносності Ейнштейна, швидкість світла в системі *К* дорівнює тому ж значенню *с*, точка *В* рухається назустріч відправленому до неї сигналу, а точку *А* світловий сигнал має наздоганяти. Тому в системі *К* сигнал прийде до точки *В* раніше, ніж до точки *А*. Побудувавши схему взаємно-однозначної відповідності між будь-якими двома одночасними подіями та приходом світлових сигналів до точок *А* та *В* аналогічно до того, як це зроблено вище, робимо висновок, що якщо дві події одночасні в будь-якій інерціальній системі відліку, то вони обов'язково не одночасні в будь-якій іншій системі. Два основних наслідки принципу відносності Ейнштейна, а саме: відносність довжини масштабів та відносність проміжків часу між подіями можуть бути отримані безпосередньо із самого принципу (дивись з цього приводу [3,5]). Найчастіше ці наслідки отримують із перетворень Лоренца. Через брак місця ми не будемо зупинятися на детальному виводі результатів, що слідують із принципу відносності Ейнштейна. Наведемо лише основні положення, зосередивши увагу на розв'язку деяких задач, рекомендованих для підготовки до екзамену.

## 2. ІНТЕРВАЛ. КЛАСИФІКАЦІЯ ІНТЕРВАЛІВ.

Математичним формулюванням принципу відносності Ейнштейна є інваріантність інтервалу між подіями при переході з однієї інерціальної системи до іншої (див., наприклад, лекції). Подія визначається місцем, де вона відбулася та часом, коли вона відбулася. Тобто, щоб визначити подію, потрібно задати три просторові координати та одну часову: $(x, y, z, t)$. Розглянемо дві події у деякій інерціальній системі відліку $K$: перша $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ та друга $(x_2, y_2, z_2, t_2)$. Тоді інтервалом між цими подіями називається величина:

$$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

В іншій інерціальній системі відліку ця величина запишеться так:

$$S'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}$$

Інваріантність інтервалу означає, що

$$S_{12} = S'_{12}$$

На лекціях детально виводяться перетворення Лоренца для координат та часу, як наслідки інваріантності інтервалу. У випадку, коли система $K'$ рухається зі швидкістю $V$ уздовж осей $x$ та $x'$, як це показано на рис.1, перетворення Лоренца мають вигляд:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \; y = y', \; z = z', \; t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \qquad (2)$$

тут штриховані величини відносяться до системи $K'$, без штриха – до системи $K$. Зворотні формули отримуються із (2) заміною «штрих» на «не штрих» та заміною знака швидкості $V$:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (3)$$

Наведемо коротко основні результати класифікації інтервалів. Введемо позначення:

$$t_{12} = t_2 - t_1 \;, \; l_{12}^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

Тоді квадрат інтервалу (1) буде $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$ . Інтервал називається *часоподібним*, якщо часова частина $ct_{12}$ більша за просторову $l_{12}$ , тобто $S_{12}^2 >$

0 . Якщо просторова частина більша за часову, тобто $S_{12}^2 < 0$ , то інтервал називається *просторовоподібним*. Нульові інтервали $S_{12} = 0$ називаються *світлоподібними*. Якщо інтервал між двома подіями часоподібний, то можна знайти систему відліку, в якій обидві події відбулися в одному й тому ж місці, і не можна знайти систему, в якій ці події одночасні. Якщо інтервал просторовоподібний, то існує система, в якій обидві події відбуваються одночасно, і немає системи, в якій вони одномістні.

**Задача 1.** Розглянемо так звану інерціальну систему нерухомих зірок, в якій Сонце, планети, зірки вважаються нерухомими. В цій системі відбуваються дві події: одна на Землі у деякий момент часу, інша – через 4 хв. на Сонці. Знайти систему відліку, в якій ці дві події відбудуться одночасно.

**Розв'язок.** Оскільки світловий сигнал йде від Сонця до Землі приблизно 8 хв., то зрозуміло, що інтервал між подіями, що розглядаються, буде просторовоподібний і, відповідно, шукану систему можна знайти. Для цього скористаємося перетвореннями Лоренца (3). Нехай вісь *x* направлена від Землі до Сонця. Нам необхідно знайти швидкість *V* інерціальної системи відліку $K'$, що летить вздовж осі $x$, в якій моменти часу $t_1'$ та $t_2'$ подій, що розглядаються на Землі та на Сонці співпадають, тобто $\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$. Згідно останньої з формул *(3)* маємо для $t_1'$ та $t_2'$ :

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{V}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Тут $x_1$ та $x_2$ – координати Землі та Сонця на обраній осі *x*.

Побудуємо різницю $t_2' - t_1' = \Delta t'$ :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

За умовою задачі, $\Delta t = t_2 - t_1 = 4$ хв. , $\Delta x = x_2 - x_1 = 8c$ , де $c$ – швидкість світла в км/хв. Прирівняємо $\Delta t'$ нулю, отримаємо $V = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{c}{2}$ .

Отже, якщо спостерігач буде летіти від Землі до Сонця зі швидкістю $\frac{c}{2}$, то йому здаватиметься, що події на Землі та на Сонці відбулися одночасно. Якщо швидкість системи $K'$ більша за $\frac{c}{2}$, то спостерігач в цій системі побачить, що подія на Сонці відбулася раніше, ніж на Землі.

**<u>Задача 2.</u>** При виконанні умов першої задачі знайти систему відліку, в які подія на Сонці відбулася на 4 хв. Раніше, ніж подія на Землі.

**<u>Розв'язок.</u>** Тепер у формулі (4) $\Delta t' = -4$ хв. , а $\Delta t$ та $\Delta x$ мають ті ж значення, що і у попередній задачі. Позначимо $\beta = \frac{V}{c}$, тоді із *(4)* ми отримаємо:

$-4 = \frac{4-8\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ або $2\beta - 1 = \sqrt{1-\beta^2}$;  $\beta = \frac{4}{5}$

Таким чином, якщо спостерігач буде летіти до Сонця зі швидкістю $V = \frac{4}{5}c$, то він побачить, що друга подія відбудеться раніше за першу на 4 хв.

Розглянуті приклади зрозуміло показують, що часова послідовність двох подій, пов'язаних просторовоподібним інтервалом, може бути змінена за рахунок переходу від однієї системи відліку до іншої, тобто такі події не можуть знаходитися в причинно-наслідковому зв'язку одна з одною. Дійсно, умова $l_{12}^2 > c^2 t_{12}^2$ означає, що за час, який проходить між подіями, жоден сигнал не може бути переданий із точки, де настала перша подія, до точки, де настане друга подія.

Якщо ми тепер розглянемо події, розділені часоподібним інтервалом, то, щоб знайти систему відліку, в якій події відбулися в одному й тому ж місці, необхідно використати першу з формул *(3)*. Будуючи різниці координат та часів першої та другої подій, отримаємо:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Прирівнюючи $\Delta x'$ нулю, отримаємо, що шукана швидкість $V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Оскільки інтервал часоподібний, то $\Delta x < c\Delta t$ і, відповідно, $V < c$. Варто зазначити, що цей результат отримується і в класичній механіці з повною відповідністю із тим, про що ми говорили вище. У конкретних задачах, які розглядаються на задачах, відстані $\Delta x$ та проміжку часу $\Delta t$ між подіями в системі $K$ (наприклад, «Земля») надаються різні числові значення, включно з такими, при яких $V \ll c$. Що означає у цьому випадку *в одному й тому ж місці простору*? Нехай одна з подій відбувається на Центральному вокзалі у Києві, а інша – на Південному вокзалі у Харкові, тобто в системі відліку «Земля» у <u>різних</u> точках простору. Якщо ми уявимо, що потяг із Києва до Харкова йде плавно та без зупинок, то для пасажира, який визирне у вікно на початку та наприкінці шляху, здаватиметься, що ці події відбулися <u>в одному й тому ж місці</u> в системі відліку «Потяг».

Для подій, розділених часоподібним інтервалом (нагадаємо, що ця властивість інтервалу не залежить від вибору системи відліку), послідовність у часі зберігається в усіх інерціальних системах відліку. Це означає, що поняття «раніше» та «пізніше» для двох таких подій, що розглядаються з точки зору спостерігачів у системах $K$ та $K'$ , мають однаковий, тобто абсолютний характер, а самі, власне, події можуть бути в причинно-наслідковому зв’язку. Звичайно, вони можуть і не бути в такому зв’язку. Мова йде лише про принципову можливість. Важливо, що для таких інтервалів наслідок не може впливати на свою причину.

## 3. ВІДНОСНІСТЬ ДОВЖИН МАШТАБІВ, ЩО РУХАЮТЬСЯ

Перейдемо тепер до аналізу двох основних наслідків з принципу відносності Ейнштейна. Перший з них стверджує, що довжина стрижня $l_0$ у тій системі, в якій він знаходиться у стані спокою, пов'язана з довжиною цього ж стрижня $l$ у системі, що рухається відносно першої зі швидкістю $V$, наступним співвідношенням:

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad (5)$$

Найбільшу довжину стрижень має в тій системі, де він знаходиться у стані спокою, тобто власна довжина стрижня є найбільшою. З формули *(5)* слідує, що, якщо б стрижень міг рухатися зі швидкістю $c$, то його довжина виявилася б рівною нулю. Але ми знаємо, що будь-яке тіло, котре має скінченну масу, в тому числі й будь-яка реально можлива система відліку, не може рухатися зі швидкістю, рівною $c$.

Розглянемо два абсолютно однакові олівця, що розташовані паралельно один одному. Нехай один з них рухається вздовж своєї довжини зі швидкістю $V$ відносно іншого. Тоді спостерігач, пов'язаний з одним із олівців, помітить, що довжина другого менша, а спостерігач, пов'язаний з другим олівцем, дійде висновку, що довжина менша у першого олівця. Але так і має бути. Через принцип відносності всі інерціальні системи відліку рівноправні. Тому, якщо ми зробили деяке твердження в одній з них, то точно таке ж твердження, згідно принципу відносності, ми зобов'язані зробити і в будь-якій іншій.

Студенти часто запитують: «Чи стає олівець «дійсно» коротшим?» Перш за все, варто підкреслити, що жодного стиснення олівця не відбувається. Це слідує з принципу рівноправності всіх інерціальних систем відліку. У всіх таких системах фізичний стан олівця той самий. Тому не можна говорити про виникнення будь-яких напруг, що призводять до деформації олівця. «Скорочення» олівця відбувається виключно через різні способи вимірювання довжини у двох системах відліку. Наведемо висловлювання Ейнштейна стосовно цього: «Питання про те, чи є лоренцове скорочення реальним, чи ні, не має сенсу. Скорочення не є реальним, оскільки воно не існує для спостерігача, який рухається з тілом; однак воно реальне, оскільки може бути принципово доведене фізичними засобами для спостерігача, котрий не рухається з тілом». В зв'язку з цим корисно розібрати наступний приклад.

**Задача 3.** Розглянемо постановку наступного експерименту. Маємо нескінченно довгу тонку стіну з круглим отвором та тонкий стрижень, розташований паралельно стіні у безпосередній близькості від неї зліва від отвору *(Рис.2)*. У стані спокою довжина стрижня більша за діаметр отвору в стіні. Товщиною стрижня та стінки нехтуємо. Нехай стрижень рухається уздовж стіни з такою швидкістю, що у системі *«Стіна»* його довжина буде меншою за діаметр отвору. В деякий момент часу злегка підштовхнемо стрижень до стіни. Момент підштовхування та силу удару (поперечну стіні складову швидкості стрижня) оберемо так, щоб середина стрижня співпала з центром отвору, коли стрижень буде проходити лінію стінки. В задачі необхідно: 1) Однозначно відповісти на питання: «Чи пройде стрижень крізь отвір в стіні, чи ні?» 2) Проаналізувати картину взаємовідносин стрижня та стінки з точки зору спостерігачів на *«Стіні»* та на *«Стрижні»*.

**Розв'язок.** Спостерігач, пов'язаний зі *«Стіною»*, побачить наступну картину.

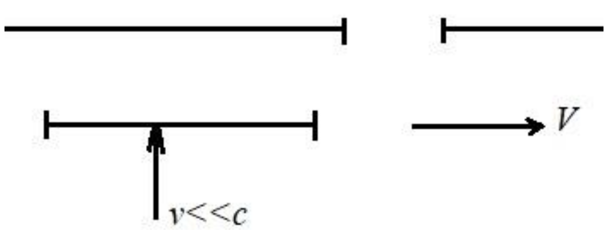

Рис.2

Стрижень за рахунок швидкості вздовж стінки, згідно формули *(5)*, матиме довжину, як сказано в умові задачі, меншу за діаметр отвору. Оскільки стрижень та стіна вважаються нескінченно тонкими, то за рахунок поперечної швидкості, отриманої в момент удару, стрижень пройде крізь отвір та опиниться з іншого боку стінки. Таким чином, на перше питання задачі ми даємо відповідь: «Так!». Частково ми відповіли і на друга питання, а саме, обговорили картину, яку побачить спостерігач, пов'язаний з системою *«Стіна»*. Стосовно картини, яку побачить спостерігач на *«Стрижні»*, інколи міркують так. Цей спостерігач, вважаючи себе нерухомим, побачить, що отвір, рухаючись назустріч йому, згідно тієї ж формули *(5)* стане меншим вихідного значення і тим паче менше довжини стрижня. Отже, стрижень, так як він буде більшим за отвір, вдариться в стінку і не пройде. Оскільки задача розглядається в експериментальній постановці, то на перше питання необхідно дати однозначну відповідь: «Так» або «Ні». Вище ми вже відповіли, що стрижень пройде. Дефект міркувань з боку спостерігача на *«Стрижні»* полягає в наступному. Для того, щоб підштовхнути стрижень і залишити його паралельним стіні, необхідно вчинити наступним чином. Наприклад, можна в системі *«Стіна»* одночасно вдарити по обом кінцям стрижня. Але ми знаємо, що події, одночасні в одній інерціальній системі, будуть обов'язково не одночасними в іншій. Аналізуючи формулу *(4)*, легко дійти висновку, що, якщо стрижень рухається зліва направо, то в системі *«Стрижень»* правий кінець підштовхується раніше за лівий. Справді, нехай по координатам лівого та правого кінців стрижня $x_1$ та $x_2$ в системі *«Стіна»* удари відбуваються одночасно, тобто $t_2 - t_1 = 0$. Тоді

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{-\frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-V^2/c^2}} < 0, \text{ тобто } t_2' < t_1'$$

і, отже, в системі *«Стрижень»* момент удару по правому кінцю станеться раніше за удар по лівому кінцю. Отже, спостерігач на *«Стрижні»* побачить, що стрижень проскакує в отвір, рухаючись під кутом до стіни *(Рис.3)*. Якщо ж ми підштовхнемо стрижень одним ударом в його середині, то так само легко обґрунтувати відносність поняття «середина стрижня» у різних системах відліку. Пропонуємо цей аналіз виконати самостійно. Неминучість порушення паралельності між стрижнем та стіною можна обґрунтувати, не вникаючи в причини, що викликали поперечне переміщення стрижня. На рис.2 відрізок (стрижень) та пряма (стіна) паралельні. Це означає, що відстань від

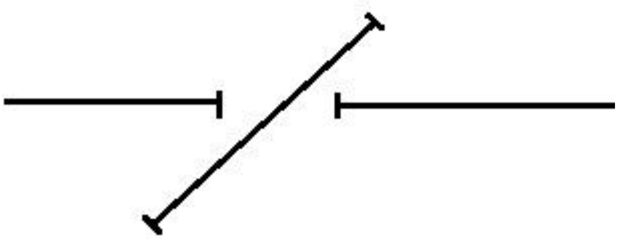

Рис. 3

кінців відрізку до прямої однакові. Все просто, якщо відрізок нерухомий. Якщо ж він рухається, то виміри вказаних відстаней необхідно провести одночасно. Через порушення поняття одночасності зрозуміло, що поперечна складова швидкості відрізку відносно прямої призводить до порушення паралельності відрізку та прямої при переході з однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Вище ми вказували, що зміна довжини стрижня, що рухається, відбувається виключно через різні способи вимірювання. Якщо один із спостерігачів отримає при вимірюванні певну довжину стрижня, то для іншого довжина цього стрижня буде іншою. Розглянутий вище приклад показує, що це явище, «котре здається», призводить до реальних наслідків: стрижень у результаті опиниться з іншого боку стінки.

Спробуємо зробити умови попередньої задачі більш жорсткими. Нехай стрижень ковзає по гладенькій стіні, у якої на шляху його руху є яма. Ширина цієї ями менша за довжину стрижня у стані спокою. Якщо швидкість стрижня настільки велика, що його довжина стане меншою за ширину ями, то під дією сили тяжіння стрижень провалиться в неї. З іншого боку, з точки зору спостерігача на стрижні, яма, рухаючись назустріч йому, через лоренцове скорочення стане більш вузькою і, відповідно, стрижень пройде над ямою, не провалюючись у неї. І в цій задачі необхідно дати однозначну відповідь на питання: «Провалиться стрижень до ями чи ні?»

Ми не будемо проводити детальний аналіз розв’язку цієї задачі. (Детальніше дивись [4]). Вкажемо, що безперечно має підтвердитись точка зору спостерігача на стіні, тобто стрижень провалиться до ями. При описі картини, яку побачить спостерігач на стрижні, варто врахувати, що теорія відносності забороняє існування абсолютно твердих тіл. (Лекції). Виявляється, що стрижень з точки зору пов’язаного з ним спостерігача, пройде в яму, перегнувшись через її край.

## 4. ВІДНОСНІСТЬ ПРОМІЖКІВ ЧАСУ

Тепер розглянемо другий наслідок, що слідує з принципу відносності Ейнштейна. В ньому стверджується, що проміжки часу $\Delta t$ в інерціальній системі $K$ та $\Delta t'$ в системі $K'$, що рухається відносно $K$ зі швидкістю $V$, пов'язані між собою наступним чином:

$$\Delta t = \frac{\Delta t\prime}{\sqrt{1-V^2/_{c^2}}} \qquad (6)$$

В загальному випадку, якщо за нерухомим годинником мине час $t_2 - t_1$, то час, що буде показувати годинник, котрий рухається зі швидкістю $v(t)$ буде:

$$\tau = t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \qquad (7)$$

Відлік часу, що відбувається за годинником, який рухається разом з даним об'єктом, називається власним часом цього об'єкта. Оскільки підінтегральний вираз в (7) не більший за одиницю, то власний час рухомого об'єкта завжди менший за відповідний проміжок часу в нерухомій системі. Суворо кажучи, співвідношення (7) підходить для годинників в інерціальних системах відліку, а якщо годинники скріплені з тілом, що рухається довільно, то вони зазнають прискорення. Прискорення впливає на хід годинника, причому по-різному для годинників різної будови. Але тоді важко говорити про відліки часу з допомогою таких годинників. Розумна інтерпретація формули (7) полягає в тому, що час $\tau$ – це сумарний час, виміряний багатьма супутніми тілу інерціальними системами. Або інакше, $\tau$ – це час, виміряний годинником, жорстко пов'язаним з тілом, але таким, на який абсолютно не впливає прискорення тіла.

У формулі (6) очевидна асиметрія в відліках часу. Нехай відносно інерціальної системи відліку *K*, в якій годинник *A* знаходиться в стані спокою, рухається прямолінійно та рівномірно інерціальна система *K'* з точно таким же годинником *A'*. Тоді годинник *A'* з точки зору спостерігача в системі *K* відстає порівняно з годинником *A*. І навпаки, з точки зору спостерігача системи *K'* відстає годинник *A*. Як і в випадку «розумного» скорочення олівців, тут немає протиріччя. Йдеться просто про різні способи вимірювання часу. Нехай в деякий момент часу годинник $A'$ пролітає повз годинника $A$, і в цей момент їх покази співпадають. Для порівняння ходу годинників $A$ та $A'$ необхідно знову порівняти покази рухомого годинника $A'$ з годинником у системі $K$. Але тепер нам доведеться порівнювати покази годинника $A'$ з тим годинником $B$ в системі $K$, повз яких вони пролітають в інший момент часу. При цьому виявиться, що годинник $A'$ відстає порівняно з годинником $B$. Ми бачимо, що конкретний годинник із системи $K'$ порівнюється з послідовністю годинників системи $K$. Тому спосіб порівняння не симетричний відносно різних систем. Завжди виявляється, що відстає той єдиний годинник, котрий порівнюється з різними годинниками іншої системи відліку.

## 5. ПАРАДОКС ГОДИННИКА

Значно складнішим є аналіз ситуації, коли один з годинників описує замкнену траєкторію та повертається в вихідне місце. У цьому випадку робимо висновок, що той годинник, який здійснював поворот і, тим самим, зазнавав прискорення, покаже менший час. Така ситуація називається парадоксом годинника. Для пояснення цього парадокса зручно користуватися просторово-часовою діаграмою Мінковського. Нехай осі $x$ та $ct$ системи *K* зображені двома взаємно перпендикулярними лініями *(Рис.4)*. Щоб провести на цій схемі осі системи *K′*, скористаємось формулами перетворень Лоренца *(2)* і *(3)*. З них видно, що початки відліку систем *K* та

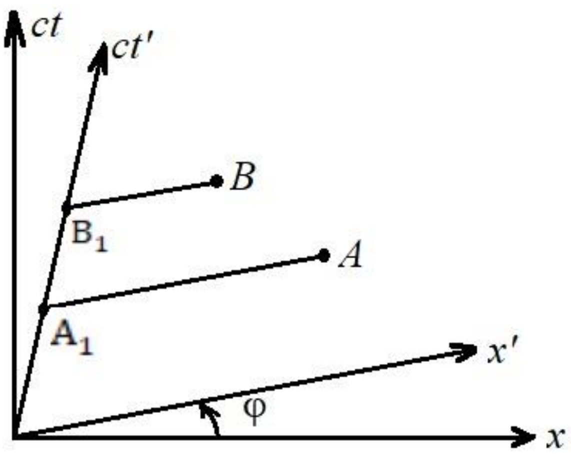


Рис.4

$K'$ співпадають (при $x = 0$ та $ct = 0$ також і $x' = 0, ct' = 0$). Вісь $ct'$ утворена множиною подій, для яких $x' = 0$, тобто $x = \beta ct$, де $\beta = \frac{V}{c}$. Тому вона зображається прямою, що проходить через 0 та утворює з віссю $ct$ кут $\varphi = arctg\,\beta$. Аналогічно вісь $x'$ утворена множиною подій, для яких $ct' = 0$, тож згідно *(3)*, це пряма $ct = \beta x$, яка утворює кут $\varphi$ з віссю $x$. Прямі, паралельні осі $x'$, є лініями одночасності в системі *K′*, оскільки описуються рівняннями $x - \beta ct = const$, тобто $ct' = const$. Тоді проміжок часу, що пройшов між будь-якою парою подій *A* та *B*, буде безпосередньо пов'язаний у системі $K'$ з відстанню між двома лініями одночасності, що проходять через ці точки, які зображують ці події. Найзручніше відраховувати такий проміжок часу вздовж осі $ct'$, як відрізок між точками $A_1$ та $B_1$, якщо, звичайно, задати на цій осі правильну шкалу часу.

Отже, нехай космічний корабель відправляється в тривалу подорож до космосу та назад, рухаючись постійно по прямій, уздовж якої спрямована вісь $x$ інерціальної системи *«Земля»* (сама Земля знаходиться в точці $O$). Таку подорож зручно розділити на п'ять етапів. Спочатку йде період прискорення $OE$. Наприкінці цього періоду швидкість корабля $V$ можна порівняти зі швидкістю світла. Рівномірний рух з цією швидкістю продовжується під час другого, більш тривалого періоду подорожі $EF$. На третьому етапі $FC$ поблизу далекої зірки або туманності відбувається зміна напрямку руху корабля на протилежний, до Землі. Потім йде четвертий етап $CD$ – тривалий період рівномірного руху зі швидкістю $V$, тепер у напрямку Землі. На п'ятому етапі $DQ$ відбувається гальмування корабля аж до зупинки на Землі. На рис.5 світова лінія Землі є прямий відрізок $OQ$. Світова лінія корабля – крива $OE'F'C'D'Q$. Вона складається з двох прямолінійних ділянок $E'F'$ та $C'D'$, що відповідають рівномірному руху корабля, та трьох викривлених $OE', F'C'$та $D'Q$, на яких корабель рухається з прискоренням. Події E, F, C та D одночасні з подіями $E', F', C'$ та $D'$ в системі Землі. Вважатимемо, що в системі відліку *«Земля»* тривалість періодів рівномірного руху значно більша за тривалість трьох періодів прискореного руху. Цього можна досягнути за рахунок збільшення дальності польоту.

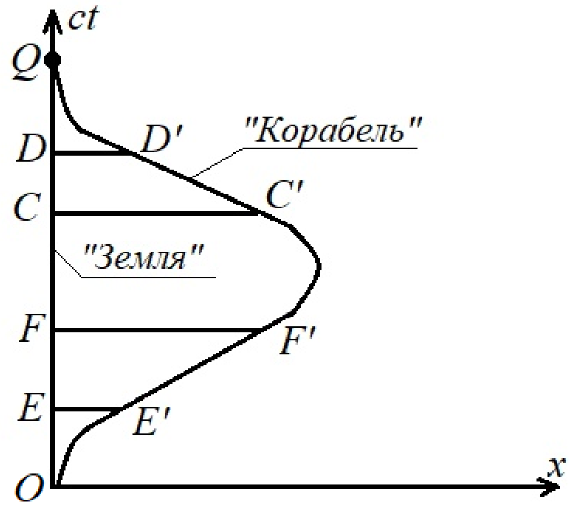

Рис.5

Порівняємо між собою періоди прискореного руху в системах *«Земля»* та *«Корабель»*. З формули (7) видно, що повний час на ділянках прискорення, повороту та гальмування за годинником на кораблі буде меншим за сумарний проміжок часу на цих ділянках, що його показує годинник Землі. Для рівноприскореного руху з прискоренням $2g$ ($g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$) у власній системі відліку висловлене припущення підтверджується точним розрахунком (див., наприклад, задачу №566 із [2]). Взагалі кажучи, прискорення впливає на хід годинника. (Якщо не вірите, киньте Ваш годинник на підлогу). Але якщо прискорення корабля не є більшим за декілька $g$, то, як показує досвід (годинники на сучасних літаках та космічних кораблях), цим впливом можна знехтувати. Таким чином, для порівняння часу всієї подорожі в системах *«Земля»* та *«Корабель»* можна не враховувати періодів прискореного руху.

Перейдемо до аналізу етапів рівномірного руху. З точки зору спостерігача на Землі годинник на кораблі покаже на ділянці $E'F'$ менший проміжок часу, ніж земний годинник на ділянці $EF$ внаслідок ефекту сповільнення часу. Аналогічно годинник космонавта на відрізку світової лінії $C'D'$ зареєструє менший інтервал часу, ніж земний годинник на відрізку $CD$.

Поєднуючи ці два результати, робимо висновок, що годинник на кораблі за весь час подорожі покаже менший проміжок часу, ніж годинник на Землі, оскільки часом, витраченим на прискорений рух, можна знехтувати.

Парадокс полягає в тому, що, здавалося б, точно такі міркування можна провести з точки зору спостерігача на кораблі. І тоді, враховуючи знову лише періоди рівномірного руху, космонавт, вважаючи себе нерухомим, дійде висновку, що менший проміжок покаже земний годинник, оскільки той буде рухатися відносно нього. Несиметричний характер міркувань спостерігачів на Землі та на кораблі очевидний тому, що немає такої інерціальної системи відліку, в якій годинник космонавта увесь час знаходився б у стані спокою. Світову лінію годинника, пов’язаного з кораблем, неможливо зобразити у вигляді прямої в жодній з діаграм Мінковського.

Хибність міркувань спостерігача на кораблі полягає в тому, що враховується

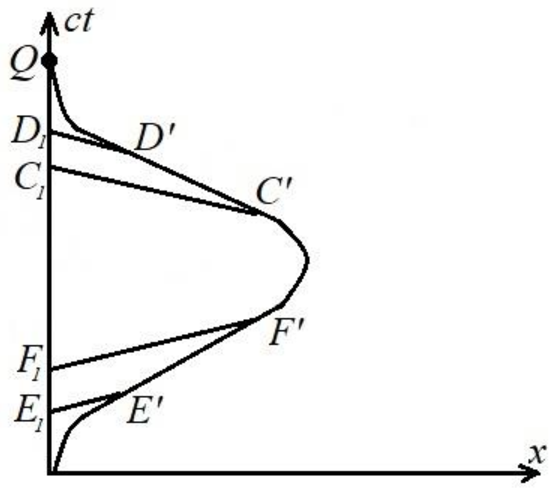

Рис.6

не весь час, показаний земним годинником. Справа у тому, що критерії одночасності для системи *«Корабель»* на шляху «туди» та на шляху «назад» не однакові. Звернемося до рис.6. На цьому рисунку показано, що кут нахилу ліній одночасності в першій половині шляху дорівнює $arctg\,\beta$, а в другій половині він дорівнює $-arctg\,\beta$, оскільки швидкість корабля на цій ділянці дорівнює –*V*. Відповідно до цього події $E_1$ та $F_1$ на світовій лінії Землі одночасні з подіями $E'$та $F'$, а події $C_1$ та $D_1$ – з подіями $C'$та $D'$ на світовій лінії корабля. З точки зору спостерігача на кораблі проміжки часу на ділянках $E_1F_1$ та $C_1D_1$ за земним годинником менші, ніж проміжки на ділянках $E'F'$ та $C'D'$ за годинником космонавта. Але тут ще неврахований час за годинником на Землі, представлений відрізком $F_1C_1$. Тому міркування спостерігача на кораблі було неповним та не давало можливості оцінити проміжок часу, що відповідає відрізку $F_1C_1$.

Проведене міркування не означає, що в спостереженні земного годинника космонавтом буде розрив. Не буде й здаватися, що в період повороту земний годинник піде в прискореному темпі. Швидка зміна відбувається лише з критерієм одночасності. Але поняття одночасності на відстані – це справа умовна й не відіграє фізичної ролі. Різка зміна критерія одночасності пов'язана з наявністю проміжків прискореного руху корабля. Дійсно, за наявності прискорення змінюється швидкість корабля, і, отже, на просторово-часовій діаграмі Мінковського змінюється нахил ліній одночасності системи корабля. Хоча й можна знехтувати сумарним часом етапів прискореного руху, існування цього прискорення відіграє вирішальну роль. Розглядаючи світові лінії Землі та корабля на діаграмі Мінковського, ми бачимо, що йдеться про порівняння ча́сів, що їх показують годинник, які рухаються <u>різними шляхами</u> від події *O* до події *Q*. Це просторово-часовий аналог ситуації, що зустрічається в повсякденному житті. Уявіть, що на рис.6 зображена ділянка автодорожньої карти, котра показує різні дороги з міста *O* до міста *Q*. Один шлях прямий, а інший теж прямий за виключенням вигинів, довжина яких мала, і нею можна знехтувати. При порівнянні довжин цих доріг можна домовитися нехтувати вигинами, але їх наявність суттєво проявляється, і при вимірюванні довжин прямолінійних ділянок ми ніяк не можемо зробити висновок, що довжини обох доріг майже однакові.

Якщо в якості двох тотожних годинників взяти два тотожних живих організми, ми отримаємо «парадокс близнюків» (див., наприклад, [8])

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА


Основна

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.:Наука, 1973.
2. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970.
3. Угаров В.А. Специальная теория относительности. – М.: Наука, 1977

Додаткова

4. Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства-времени. – М.: Мир, 1973.
5. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика – 10. – М.: Просвещение, 1981.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965.
7. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963.
8. Мардер Л. Парадокс часов. – М.: Мир, 1973.
9. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. – М.: Наука, 1972.